feemcat
federació d'entitats per a l'ensenyament
de les matemàtiques a Catalunya

Els problemes del Fem Matemàtiques com a recurs d'aula

Treballant els problemes del Fem Mates fora de concurs

Guillem Bonet Carbó i Carme Vicens Andrés
Grup de Resolució de Problemes Fem Matemàtiques

Resum

El Fem Matemàtiques[1] no és només un concurs de resolució de problemes, sinó que també pretén ser un banc de recursos on mestres i professors trobin materials útils a les aules i que ajudi a treballar totes les competències i els processos matemàtics d'una manera integrada. En aquest article fem una pinzellada sobre les virtuts del treball a través de la resolució de problemes i ens endinsem de ple en un únic problema per veure que a partir d'una proposta senzilla podem aconseguir diferents activitats riques i que donen molt joc a l'aula.

Abstract

Fem Matemàtiques[1] is not only a problem-solving competition but also a resource bank where teachers find useful materials in the classroom and help work on all math skills and processes in an integrated way. In this article we give a glimpse at the virtues of working through problem solving and delve into a single problem to see how, from a simple proposal, we can achieve different rich activities that can be productively used in the classroom.

Introducció

Heu intentat fer els problemes de la primera fase del Fem Matemàtiques? Si ho heu fet, sabreu que no són de resposta immediata, sinó que exigeixen un cert treball del problema per poder arribar a donar-hi solució. També als adults, quan els volem treballar, ens comporten uns moments de dedicació, activitat matemàtica i reflexió, i un procés de descoberta d'alguna propietat amagada.

Precisament, els problemes estan plantejats per donar accés als nostres alumnes a la descoberta d'una idea clau (concepte, propietat, relació, procediment. . .), cosa que facilita l'accés a la resolució als alumnes amb més dificultats i alhora dona un espai per a l'ampliació als més avantatjats. Per aquest motiu, pensem que els problemes de la primera fase del concurs són ideals per treballar-los com a activitat d'aula dins i fora del concurs amb l'objectiu de treballar els processos i el pensament matemàtic mitjançant la resolució de problemes.

Per què la resolució de problemes?

L'educació matemàtica sovint s'ha confós amb una sèrie d'exercicis amb respostes fàcilment assolibles, amb un entrenament després del qual l'aprenent té la falsa sensació d'haver arribat a l'objectiu. En canvi, s'ha quedat en un estadi molt inicial sense saber-ho, ja que té una llista d'eines en un calaix. . . , però no les ha utilitzat mai!

La resolució de problemes (en endavant, RP) és molt més profunda. L'alumne, per poder resoldre problemes, necessita les eines anteriors: tant continguts com estratègies que l'ajudin a anar més enllà i a pensar matemàticament, però, sobretot, unes riques i continuades experiències.

En el camí, la RP ajuda els alumnes a acceptar riscos, a ser resilients i perseverants. En aquest sentit, a l'hora d'enfrontar-nos al problema és important el paper de les pròpies creences i actituds, però un bon entrenament ens portarà a reforçar actituds com la motivació, l'interès, la confiança, el gust per assumir riscos. . . El nivell de profunditat que requereix resoldre problemes complexos es transfereix a futures carreres de camps STEM (STEM és l'acrònim anglès que engloba les disciplines educatives: Science (ciència), Technology (tecnologia), Engineering (enginyeria), Art (art) i Mathematics (matemàtiques) (Andreescu, 2020).

A més, treballar a través de la RP incideix en el que ens fa més humans: la creativitat. Mai no hi ha una única aproximació al problema, sinó que molts camins són possibles per arribar a la solució o les solucions —no ha de ser única!—. A l'aula, si deixem marge a la creativitat, és habitual que n'apareguin diversos, de camins, i cal donar-los valor a tots: més llargs, més curts, més originals o més elegants, quan es posen en comú tots aporten bones estratègies que ens enriqueixen per emprendre nous reptes.

Cal tenir en compte que, malgrat que l'alumnat estigui centrat a donar solució al problema, la nostra intenció educativa ha de ser crear aprenentatge: els processos matemàtics, les eines i les estratègies que posem en marxa, la capacitat de representar i comunicar els raonaments seguits i els resultats obtinguts, la capacitat de plantejar-se noves preguntes o les connexions internes (dins les mateixes matemàtiques) o externes que puguin sorgir. Si, a més, fem això en grup, totes aquestes habilitats —o, si voleu, competències— es multipliquen. Si volem un treball totalment competencial, aquí tenim una molt bona opció.

Però com són els veritables problemes? Segons Antoni Vila i M. Luz Callejo (Vila i Callejo, 2005), un problema no és ni bo ni dolent *per se*, sinó que això dependrà dels elements del problema i de la seva formulació, però també de l'alumne (i dels seus coneixements i afectes), de les nostres intencions educatives, de l'organització de la tasca i de la gestió que en fem com a mestres a l'aula. La nostra comesa, lluny de dictar sentència sobre si un camí és bo o dolent, serà acompanyar els alumnes a través de bones preguntes que fomentin la conversa matemàtica o bé els facin dubtar i replantejar-se les seves estratègies i els seus resultats quan s'intueixin incorrectes o bé els portin més enllà en les seves investigacions quan la línia que estan seguint sembli bona.

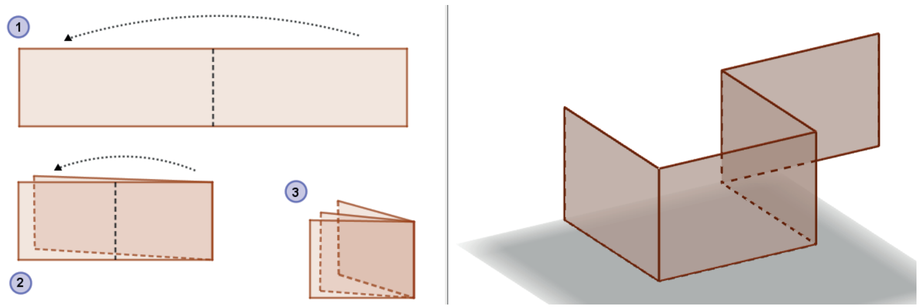
Tot i això, segons la Comissió per a l'Impuls de les Conclusions del Congrés Català de Matemàtiques (C^2EM) 2016, hi ha problemes que tenen més «ingredients» per triomfar en el nostre propòsit. Alguns d'aquests ingredients són: que sigui accessible, és a dir, el que anomenem «de llindar baix», per tal que tots els alumnes puguin començar; que admeti múltiples enfocaments i representacions; que sigui significatiu per als aprenents i sigui capaç de mantenir el repte i l'interès; que sigui matemàticament rellevant i impliqui idees i continguts clau, o bé faciliti la construcció de nous coneixements i la de connexions; que activi el pensament i els processos matemàtics; que fomenti la col·laboració i la discussió entre els aprenents; i que sigui extensible, és a dir, que permeti amplitud i profunditat en els objectes d'aprenentatge per poder saciar la curiositat dels que aprenen més ràpidament.

Els problemes de la primera fase del Fem Matemàtiques estan pensats de manera que tinguin el màxim nombre possible d'aquestes característiques.

Tot seguit presentem com a exemple un problema que hem adaptat a partir d'una proposta senzilla i que pensem que té moltes de les característiques descrites anteriorment. Aprofundint en la idea de l'extensibilitat, proposem algunes possibilitats que permeten anar més enllà i enriquir encara més l'activitat. En aquest tipus de problemes és habitual treballar totes o gairebé totes les competències del currículum, però en aquest article destaquem només les més rellevants.

Problema 1: plegant paper

Imaginem una tira llarga de paper. Dobleguem-la per la meitat fent coincidir els dos extrems curts l'un sobre l'altre. Quan la tornem a obrir, observarem al mig una marca de doblec. Si en lloc de doblegar-la una vegada ho fem dues vegades, sempre per la meitat i en el mateix sentit, quan la tornem a obrir observarem tres marques de doblec. Quantes marques observaríem si féssim això deu vegades en total?



Imatge 1. Tira de paper doblegada dues vegades i la mateixa tira desplegada a la dreta.

Treballem el problema?

CM5. Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.

És un problema dels que es coneixen com de llindar baix i sostre alt: en poder manipular, tothom pot començar, ja que no comencem en abstracte. Quan comencem a doblegar, intuirem com podem atacar el problema.

Observem que la pregunta és molt concreta, però en realitat ens està demanant una generalització, ja que no és possible plegar físicament deu vegades la tira de paper.

L'alumnat començarà a manipular i a fer les seves hipòtesis. És habitual que de seguida aparegui la proporcionalitat. Pensen: «si doblegant dues vegades obtinc tres marques, doblegant quatre vegades n'obtindré sis». Nosaltres, docents que estem gestionant l'activitat, no hauríem de dir-los si això és o no correcte, però sí que podem guiar-los per descobrir que no ho és.

Com? Doncs fent bones preguntes. Per exemple:

- Els podem demanar quines dades han trobat fins al moment i suggerir-los que ho comprovin amb algunes que compleixin les condicions.
- Quantes marques hi ha amb un doblec i amb dos (o amb dos i quatre doblecs)? Són el doble l'una de l'altra?
- En quantes parts queda dividida la cinta de paper després de doblegar-la tres vegades?

D'aquesta manera, seran ells mateixos els que ho descobriran.

Per buscar la solució haurem de començar a plegar i, de manera ordenada, anar anotant els resultats que obtenim. És important insistir a anar registrant el procés per poder fer un bon informe al final.

CM9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.

Ens podem anar fixant, també, en les diferents maneres de representar els resultats que van obtenint. Això, juntament amb l'elaboració de l'informe, ens donarà informació sobre el nivell d'assoliment de les competències de comunicació i representació, que sovint costen més d'avaluar. Si treballem el problema fora de concurs, podem aprofitar per posar en comú les diferents maneres de representar, per així tenir models i anar omplint el calaix de noves eines.

CM2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.

Si ens centrem en les marques, tal com demana el problema, la seqüència que obtenim no ens dona gaires pistes. . . Per això serà bo afegir el nombre de parts en què està dividida la cinta.

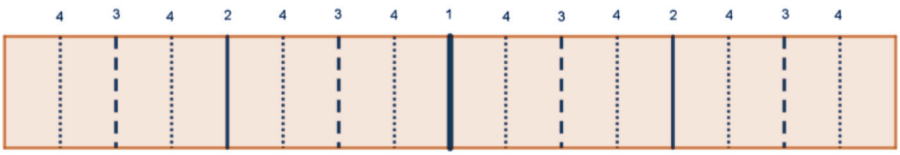
Doblecs	1	2	3	4	...	n
Marques	1	3	7	15	...	$2^n - 1$
Parts	2	4	8	16	...	2^n

En aquest cas, amb una mica de treball descobrirem una relació entre el nombre de doblecs i el nombre de parts generat, que sempre és una potència de 2 (sempre?, resulta adient a l'aula buscar l'explicació d'aquesta afirmació), i encara resulta més senzill relacionar el nombre de marques amb el nombre de parts, que sempre és una menys. Per això, ja estem convençuts que la resposta a la pregunta que ens han fet és: $2^{10} - 1 = 1.023$.

CM3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.

Com hem comentat amb anterioritat, els problemes solen tenir diferents vies d'aproximació. És recomanable repensar el problema de diferents maneres per estar previnguts de per on es mouran els alumnes i amb quines dificultats es trobaran. Per aquest motiu és interessant que ens fem aquesta pregunta: com podem trobar el nombre de marques sense passar pel nombre de parts?

Observem el procés de creació de marques i ens fixem en el moment en què va apareixent cadascuna.



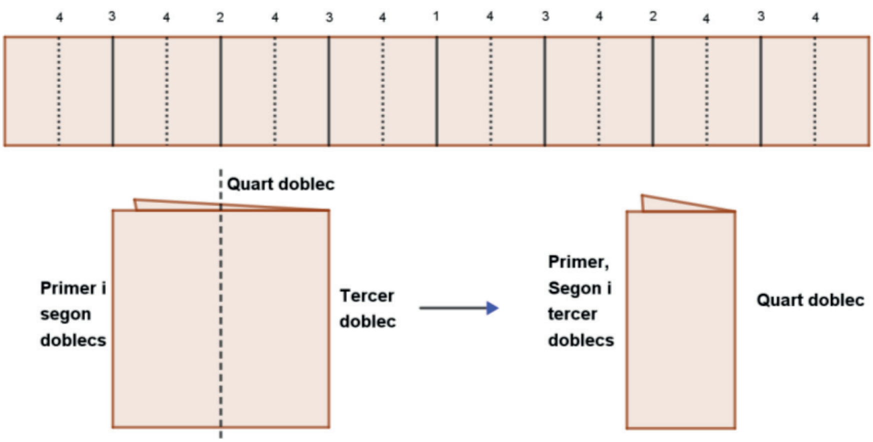
Imatge 2. Tira de paper doblegada quatre vegades i amb les marques aconseguides.

Comencem manipulant una cinta nova de paper i marquem amb cada doblec les marques noves que apareixen. Podem anotar els resultats obtinguts en una taula com la que hem fet abans:

Doblecs	1	2	3	4	$\cdots$	n
Marques noves	1	2	4	8	$\cdots$	2^{n-1}
Total marques	1	$1+2$	$1+2+4$	$1+2+4+8$	$\cdots$	$1+2+4+\cdots+2^{n-1}$

Però podem predir quants doblecs nous ens sortiran si ja hem doblegat unes quantes vegades?

Suposem que hem doblegat la cinta tres vegades i que estem a punt de doblegar un cop més. Podem observar que la cinta quedarà doblegada just pel mig del rectangle plegat en què se'ns ha convertit la cinta inicial.



Imatge 3. Tira de paper doblegada quatre vegades i amb les marques aconseguides.

Per tant, el nombre nou de marques que apareixeran en aquest quart doblec és el mateix que el nombre total de parts que hi havia fins ara. A part, com que hem anat doblegant la cinta sempre per la meitat, aquest nombre total de parts serà una potència de 2!

Aquest raonament serà molt més ric si aconseguim que siguin ells qui el trobin. Per fer-ho serà imprescindible que els expliquem molt bé què és el que volem i que comencin a buscar la interpretació del nombre de doblecs manipulant. En aquesta situació, els alumnes trobaran la interpretació que busquen responent a les preguntes adequades. En cas que els ajudem nosaltres, hem de vigilar que aquestes no portin implícita la resposta.

CM4. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.

Arriba el moment de posar en comú els resultats obtinguts fins al moment pels diferents grups d'alumnes. Aquest moment és important per diversos motius: dona valor al que han estat fent, els proporciona noves eines a partir de les idees dels companys i, de vegades, fins i tot els permet descobrir propietats interessants. En aquest cas, és molt probable que hi hagi diferents maneres de pensar el problema i de buscar-ne la solució, però nosaltres ja ens hem assegurat que n'apareguin com a mínim dues, que, per tant, han de ser equivalents:

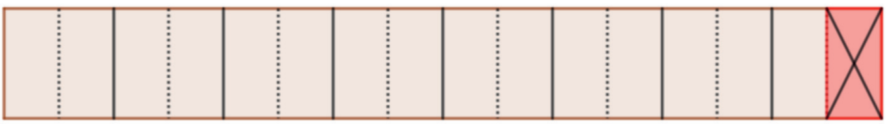
CM10. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.

$$2^{10} - 1 = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^9$$

Aquesta idea és una oportunitat a l'aula per trobar conjuntament una generalització de la igualtat: $2^n - 1 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$.

Quan proposem aquesta igualtat, els alumnes s'acostumen a preguntar si això passa sempre. La resposta torna a estar en la tira de paper.

Agafem la tira de paper amb quatre doblecs. Aquesta està dividida en $2^4 = 16$ parts. Si eliminem una d'aquestes parts, obtenim $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ parts.



$$2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$$

$$2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

Imatge 4. Visualització de la igualtat amb tires de paper.

Agrupem ara aquestes quinze parts restants en suma de potències de 2 i comprovem que hi ha el mateix nombre de parts.

La proposta de visualització és bonica, malgrat que la demostració és un punt menys visual:

$$2^4 - 1 = 2^3 + 2^3 - 1 = 2^3 + 2^2 + 2^2 - 1 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^1 - 1 = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1.$$

Es pot argumentar que, d'una manera més o menys llarga, podem arribar al mateix resultat amb qualsevol altre valor de *n*, i així obtenim la generalització per a tot nombre natural *n*.

Primera extensió

Malauradament, alguns alumnes hauran estat capaços de donar solució al problema sense veure aquestes relacions i, per tant, perdent-se part de la bellesa que amaga. Altres alumnes, més avantatjats, hi hauran donat solució satisfactòriament i els cal més carburant per continuar treballant. En ambdós casos els podem fer preguntes per aconseguir que repensin el problema, tot i que les preguntes no seran les mateixes per a tots.

CM7. Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.

En aquest apartat hem reformulat com a reptes dues d'aquestes preguntes, en les quals obliguem l'alumne a replantejar el problema fixant-se no només en el resultat numèric, sinó en qüestions com ara la paritat o no d'un resultat. Li oferim una eina per treballar el problema des d'un altre punt de vista segurament molt diferent del que ha trobat inicialment i li donem l'oportunitat de treballar el raonament buscant una relació intrínseca entre els diferents resultats que van sorgint.

Repte 1.1. Quin és el nombre mínim de cops que hem de doblegar la cinta per aconseguir que el nombre de marques sigui un nombre parell?

Ja ho hem respost amb anterioritat: com que el nombre de parts sempre serà parell, el nombre de marques sempre haurà de ser senar i, per tant, no serà mai parell.

Repte 1.2. Amb quants doblecs aconseguim un nombre primer de marques?

En aquest cas, comencem amb una exploració exhaustiva dels primers valors de les solucions i marquem els valors que ens donen un nombre primer de marques.

Doblecs	***Marques***	***Doblecs***	***Marques***
1	$M_1 = 2^1 - 1 = 1$	**5**	$\boldsymbol{M_5 = 2^5 - 1 = 31}$
2	$\boldsymbol{M_2 = 2^2 - 1 = 3}$	6	$M_6 = 2^6 - 1 = 63$
3	$\boldsymbol{M_3 = 2^3 - 1 = 7}$	**7**	$\boldsymbol{M_7 = 2^7 - 1 = 127}$
4	$M_4 = 2^4 - 1 = 15$	8	$M_8 = 2^8 - 1 = 255$

Si ens fixem en els resultats numèrics obtinguts, comencem a intuir que apareixerà un nombre primer de marques quan el nombre de doblecs també sigui primer. Amb aquesta tasca aconseguim apropar a l'alumne els nombres primers de ***Mersenne***.

Ara bé, si ens quedem en els valors de la taula, podem arribar a una conclusió equivocada. Sembla que si el nombre de doblecs és primer, el nombre de marques també ho ha de ser.

Provem amb el següent nombre primer? Amb onze doblecs apareix un nombre de marques igual a:

$$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2{,}047 = 23 \cdot 89$$

que no és primer. La teoria, en canvi, torna a funcionar per als nombres de doblecs 13, 17, 19. . . El que ens queda clar és que la implicació no és directa. També podem arribar a raonar que si el nombre de marques és un nombre primer, el nombre de doblecs també ho serà. Per a això caldrà un càlcul algebraic més potent:

$$\text{Si } n = a \cdot b \;\Rightarrow\; (2^a - 1) \cdot \left(1 + 2^a + 2^{2a} + 2^{3a} + \cdots + 2^{a\cdot(b-1)}\right) = 2^{ab} - 1.$$

Queda, doncs, provat que amb un nombre compost de doblecs aconseguirem un nombre compost de marques.

Segona extensió

Aquesta nova extensió és molt interessant per acabar de reforçar els coneixements apresos, just en el moment posterior a la posada en comú.

Repte 2. Suposem que hem doblegat la cinta de paper tres vegades. Un cop doblegada, ens queda una mena de llibret en forma de rectangle. Amb unes tisores tallem el llibret horitzontalment i verticalment. En quants trossos ens quedarà tallada la cinta?

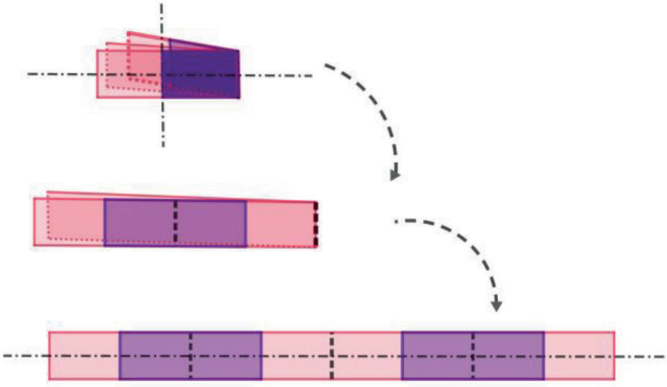
Evidentment, el repte és buscar la resposta sense manipular la cinta, sense tallar la cinta físicament.

Per respondre a aquesta pregunta, recordem que la cinta de paper estava doblegada en el moment de fer els dos talls (horitzontal i vertical).

Després, fixem-nos que el primer tall en horitzontal tallarà la cinta inicial en dues parts iguals (sempre que aquest tall sigui perpendicular al sentit del doblec).

En canvi, el tall vertical tallarà cada pàgina del llibret en dues, però estaran unides per un plec! De manera que es respectaran el nombre de doblecs. Tots? No! En aquest cas, per a cada meitat de cinta ens sortiran tants talls com doblecs hi hagi més els dos dels extrems.

Això és fàcil de veure si ens fixem en com queda la cinta en el moment previ al tall:



Imatge 5. Visualització de la cinta abans dels talls.

Observem que cada tall vertical es troba entre dos plecs consecutius i, per tant,

$$\text{parts} = 2 \cdot (n + 2)\,,$$

on n és el nombre de marques que ens ha sortit (en el nostre cas, $n = 1 + 2 + 4 = 7$). Per tant:

$$\text{parts} = 2 \cdot (7 + 2) = 2 \cdot 9 = 18$$

Tercera extensió

La tercera i la quarta extensió que proposem estan formulades com a *divertimento*, com un problema per pensar sense més. Aquesta mena de problemes acostumem a plantejar-los a l'aula com a reptes (no obligatoris) per a tots, amb l'esperança que els alumnes més motivats s'animin a treballar-los.

Repte 3.1. Fixeu-vos que, quan dobleguem, algunes marques queden cap amunt i d'altres, cap avall. Les primeres les anomenarem pics (P) i les segones, valls (V). Podríeu trobar algun patró en la seqüència de pics i valls?[2]

(Recordeu que dobleguem sempre en el mateix sentit)

Manipulant la cinta físicament i anotant pics i valls a cada iteració del procés, podem recollir els primers passos en una taula i intentar buscar patrons numèrics o visuals. En podem trobar alguns a partir dels nombres de pics, valls i total: els pics i les valls sempre difereixen d'una unitat, o bé que el nombre de pics coincideix amb el nombre total de plecs en la iteració anterior.

2. . Extensió proposada a [2].

Iteració	Seqüència de plecs: pics (*P*) - valls (*V*)	Pics	Valls	Total
1	V	0	1	1
2	V-V-P	1	2	3
3	V-V-P-V-V-P-P	3	4	7
4	V-V-P-V-V-P-P-V-V-V-P-P-V-P-P	7	8	15
5	V-V-P-V-V-P-P-V-V-V-P-P-V-P-P-V-V-V-P-V-V-P-P-P-V-V-P-P-V-P-P	15	16	31

Però és que n'hi ha més! Us heu fixat en la simetria de la solució? Si ens fixem en la seqüència de pics i valls, mirant al centre veurem que es repeteix de manera simètrica però amb el valor contrari: si comença amb dues valls, acaba amb dos pics, i així anar fent.

Si volem estudiar millor com evoluciona la freqüència, podem mirar la sèrie d'iteracions diferenciant els plecs nous dels antics.

Iteració	Seqüència de plecs: pics (*P*) - valls (*V*)
1	V
2	V-**V**-P
3	V-**V**-P-**V**-V-**P**-P
4	V-**V**-P-**V**-V-**P**-P-**V**-V-**V**-P-**P**-V-**P**-P
5	V-**V**-P-**V**-V-**P**-P-**V**-V-**V**-P-**P**-V-**P**-P-**V**-V-**V**-P-**V**-V-**P**-P-**P**-V-**V**-P-**P**-V-**P**-P

Un cop entrada la marca de les iteracions anteriors, si ens fixem només en les noves veiem que es van alternant: comencen amb una vall i es va alternant, ara vall, ara pic.

I és que té molt sentit que es vagin alternant. Si mirem com tenim la tira de paper doblegada —en dos doblecs, per fer-ho més senzill—, veurem que les marques que hi ha en el segon doblec són un pic i una vall que es complementen, és a dir, que l'una encaixa dins l'altra, i just entre aquestes dues hi ha una vall que les encadena.

Alternant la manipulació, la reflexió i l'anotació correcta dels resultats aconseguim donar resposta a un problema complex que inicialment senblava senzill.

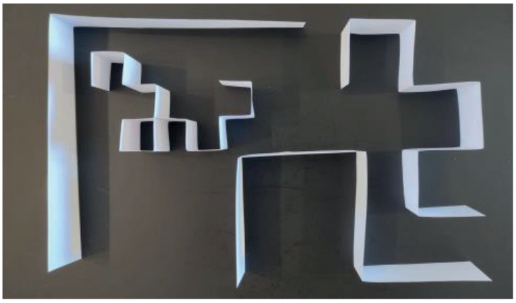
Però no acabem aquí i fem un pas més. Us proposem un petit segon repte dins aquest apartat.

Repte 3.2. Hem portat a l'aula el repte dels pics i les valls doblegant una cinta de paper. Un alumne ens comenta preocupat que no li ha sortit la mateixa seqüència de pics i valls doblegant quatre cops la cinta. La seva seqüència és: V-P-P-V-V-V-P-V-V-P-P-P-V-V-P. Què pot haver passat? Podem detectar on s'ha equivocat?

Quarta extensió

Aquesta darrera extensió es passeja per una vessant més artística que les anteriors, però al mateix temps no exempta de raonament matemàtic.

Repte 4.1. Despleguem les tires de paper de manera que cada plec formi un angle recte. Si ho fem amb diverses iteracions, quin tipus de figura obtenim?

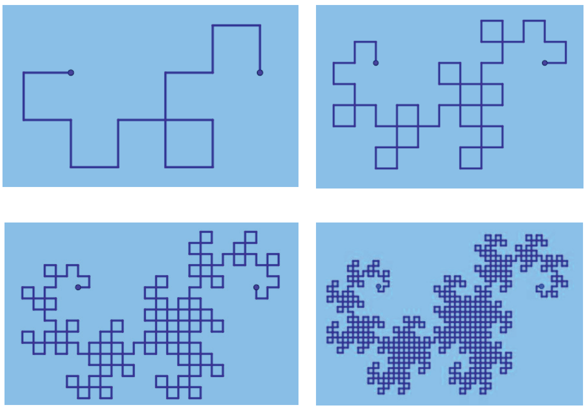


Imatge 6. Primeres iteracions de la cinta.

Si analitzem la tercera iteració, per exemple, observarem que conté dues vegades la segona i quatre vegades la primera. Si fem el mateix amb la quarta, veiem que passa el mateix: conté dues vegades la tercera, quatre vegades la segona i vuit la primera.

Sembla que hem descobert un patró i sospitem que la figura que obtindrem és un fractal. . . Comprovem-ho, creem-lo nosaltres mateixos! Per començar, és recomanable construir les primeres iteracions en paper i manipular-les per entendre bé de quina manera cada iteració conté les anteriors. Tot seguit podem provar de dibuixar-ne algunes en paper quadriculat, però per tal de facilitar la tasca us proposem que deixeu el paper quadriculat com a base i utilitzeu un full de paper vegetal o de plàstic transparent per a cadascuna de les iteracions. D'aquesta manera resultarà més senzill canviar cada segment per la iteració 1 o 2 (si ho fem amb la 2, avançarem més ràpidament en la construcció del fractal). També ens haurem de fixar en el fet que l'orientació va canviant.

Hem descobert el fractal anomenat *corba del drac*. En podeu visualitzar la construcció en l'aplicació següent de GeoGebra (www.geogebra.org/m/qpuk5wck):



Imatge 7. Iteracions 4, 6, 8 i 10 del fractal corba del drac.[3]

3. Aplicació amb GeoGebra creada per Guillem Bonet: www.geogebra.org/m/qpuk5wck. (consulta: 3 d'abril de 2022).

Repte 4.2. Podeu omplir el pla amb només una de les iteracions anteriors?

En aquest cas, es tracta només d'un entreteniment al qual podem jugar manipulant tires de paper o bé amb paper quadriculat i llapis de colors, per exemple. Triem una de les iteracions i l'anem posant/dibuixant amb diferents colors, modificant l'orientació i la simetria de tota la peça, si ens convé. El repte consisteix a buscar una rutina que enrajoli el pla amb la peça escollida.

Conclusions

Hem vist que un sol problema pot donar molt joc. És clar que no podem presentar totes les propostes als alumnes, sinó que triarem les que siguin més adequades, tenint en compte que no cal que tot el grup faci les mateixes.

Els alumnes dels cursos superiors de primària podran trobar els patrons de creixement del nombre de parts i de marques, sobretot si ja coneixen el concepte de potència i han treballat prèviament les potències de 2. El fet que no coneguin el llenguatge algebraic no impedeix que puguin arribar a generalitzar el resultat: es tracta d'una bona ocasió per treballar la dimensió de comunicació i representació, així com la de raonament i prova. Pensem que en aquests nivells també es pot adaptar el problema als alumnes afegint alguna extensió, que poden treballar —com a secundària!— amb el suport de material manipulatiu.

En qualsevol cas, pensem que els problemes no han de ser rígids i inamovibles, sinó que els podem (i hem de) adaptar a les necessitats dels nostres alumnes en funció de les seves característiques, dels seus coneixements previs i dels objectius didàctics que ens plantegem assolir.

Per acabar, us convidem a consultar el Banc de Recursos del Fem Matemàtiques,[4] on trobareu exemples de problemes que han aparegut al concurs, juntament amb les seves propostes i anàlisis didàctiques.

Referències

[1] Andreescu, T.; Cordeiro, K.; Andreescu, A. (2020). *Awesome Math. Teaching mathematics with problem based learning*. Hoboken (NJ): Jossey-Bass.
[2] Shell Center for Mathematical Education (1984). *Problemas con pautas y números.* Universitat de Nottingham.
[3] Vila, A.; Callejo, M. L. (2005). *Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea.
[4] Vila, A. *et al*. (2018). *Activitats de referència: Comissió per a l'impuls de les conclusions del C2EM 2016.* https://c2em.feemcat.org/cic-c2em-comissio-per-a-limpuls-de-les-conclu sions-del-congres-catala- deducacio-matematica/activitats-de-referencia/.

4. Banc de recursos del Fem Matemàtiques: https://bancfm.blogspot.com/. (consulta: 3 d'abril de 2022)